参考书籍

1. 黄正海, 苗新河，2014, 最优化计算方法． 科学出版社

2. 袁亚湘 , 孙文喻，1997, 最优化理论与方法．科学出版社

3.陈宝林，2005．最优化理论与算法． 清华大学出版社

4. Dimitri P. Bertsekas, 1999, Nonlinear Programming, Athena Scientific,

5. Boyd Stephen, 1988, Convex Optimization, Cambridge University Press.

目录

1.1 最优化问题概述

一、什么是最优化

最优化就是判别在一个问题的众多解决方案中什么样的方案最佳，以及如何找出最佳方案。

二、最优化问题的基本数学模型

minimize $\min_x \quad f(x)$ I: 不等式指标集

Subject to $s.t. \quad c_i(x) \geq 0, \quad i \in I := \{1, 2, \ldots, p\} \quad (1.1.1)$

$c_i(x) = 0, \quad i \in E := \{p+1, \cdots m\},$ E：等式指标集

x:决策变量； f(x):目标函数或价值函数;

注：最优化模型的三要素：决策变量；目标函数；约束函数；

几个定义：

可行域(可行集)：称已下集合为可行（域）集

$$F := \left\{ x \in R^n \mid \begin{array}{l} c_i(x) \geq 0, \forall i \in I := \{1, 2, \cdots, p\}; \\ c_i(x) = 0, \forall i \in E := \{p+1, \cdots, m\} \end{array} \right\}$$

若$F = \varnothing$,则称问题(1.1.1)是不可行的；否则称问题是可行的。

可行集中的点称为可行点。

定义1. 1. 1：假设可行域由以上定义给出，则

(1)若$x^* \in F$且对任意$x \in F$都有$f(x^*) \leq f(x)$,则称x^*为最优化问题(1. 1. 1)的一个全局最优解。

(2) 若 $x^* \in F$ 且对任意的 $x \in F \setminus \{x^*\}$，都有 $f(x^*) < f(x)$ 则称 x^* 为最优化问题(1. 1. 1)的严格全局最优解。

(3)若 $x^* \in F$，且存在 x^* 的一个邻域 $N_\varepsilon(x^*) := \left\{ x \in R^n \mid \left\| x - x^* \right\| < \varepsilon \right\}$ 使得对所有 $x \in (F \cap N_\varepsilon(x^*))$ 都有 $f(x^*) \le f(x)$，则称 x^* 为最优化问题的一个局部最优解。

(4) 若 $x^* \in F$，且存在 x^* 的一个邻域 $N_\varepsilon(x^*)$ 使得对所有 $x \in (F \cap N_\varepsilon(x^*)) \setminus \{x^*\}$ 都有 $f(x^*) < f(x)$，则称 x^* 为最优化问题的一个严格局部最优解。

定义：对于最优化问题（1.1.1），称其最优解所对应的目标函数值 $f(x^*)$ 为此优化问题的最优值。

定义：最优解集：全局最优点的集合，通常记为*S.*

若$S=\varnothing$ 或 $F=\varnothing$ 或$F\neq\varnothing$但最优化问题的目标函数在可行域上无下界则最优化问题无最优解；

例：
$$\min\ x \quad s.t.\ x>1$$
$$\min\ x \quad s.t.\ x^2<-1$$
$$\min\ x \quad s.t.\ x<1$$
$$\min\ x^2 \quad s.t.\ x^2-1=0$$

注：最优解未必存在，即使存在也未必唯一；但最优解存在时最优值必存在且唯一。

注：其它形式的最优化问题可以转化为最小化模型，如max模型。

$$\begin{array}{ll}\max_x & f(x)\\ s.t. & c_i(x)\geq 0,\quad i\in I:=\{1,2,\ldots,p\}\\ & c_i(x)=0,\quad i\in E:=\{p+1,\cdots m\},\end{array} \iff \begin{array}{ll}\min_x & -f(x)\\ s.t. & c_i(x)\geq 0,\quad i\in I:=\{1,2,\ldots,p\},\\ & c_i(x)=0,\quad i\in E:=\{p+1,\cdots m\},\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I := \{1, 2, \ldots, p\} \quad (1.1.1) \\
& c_i(x) = 0, \quad i \in E := \{p+1, \cdots m\},
\end{aligned}
$$

其它形式：

$$
\min \left\{ f(x) \middle| \begin{aligned} & c_i(x) \geq 0 \quad \forall i \in I := \{1, 2, \cdots, p\}; \\ & c_i(x) = 0, \quad \forall i \in E := \{p+1, \cdots, m\} \end{aligned} \right\}
$$

$$
\min \{ f(x) | x \in F \}
$$

$$
\min_{x \in F} f(x);
$$

$$
x^* = \arg\min_{x \in F} f(x)
$$

argmin: the argument of the minimum的缩写。

最优化问题的分类

(1) 根据有无约束
- 无约束优化：若 $F = R^n$
- 约束优化：$F \subseteq R^n$ 且 $F \neq R^n$

(2) 根据所涉及函数的线性与否
- 线性规划：若目标函数、约束函数均是线性的
- 非线性规划：否则

(3) 根据目标函数类型
- 单目标规划：若目标函数是一个多变量实值函数
- 多目标规划：若目标函数是一个多变量向量值函数

(4) 根据涉及函数的可微性
- 光滑优化：若目标函数和约束函数都是连续可微的
- 非光滑优化：否则

（5）根据所涉及函数的凸性$\begin{cases}\text{凸规划：}f\text{是凸函数，F是凸集}\\ \text{非凸规划：否则}\end{cases}$

（6）根据可行点的个数分类（决策变量的取值是离散还是连续）

$\begin{cases}\text{连续优化：若F中含无穷多个点，且可行域的点连续变化}\\ \text{离散优化：若F中含有限多个点或可数多个点}\\ \qquad\text{（特例：整数规划、混合整数规划、0-1整数规划）}\end{cases}$

注：（1）以上是基本分类，还有其它分类；（2）部分优化问题可以相互转化。例

$$\begin{array}{ll}\min & x_1+2x_2+x_3^2\\ s.t. & x_1,x_2,x_3=0\text{或}1\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\min & x_1+2x_2+x_3^2\\ s.t. & x_i(x_i-1)=0, i\in\{1,2,3\}\end{array}$$